Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.04.2012.

Prvi parcijalni iz predmeta **Euklidska geometrija 2**

Zadatak br. 1

(20%) a) Simetrala ugla kod vrha A oštrouglog trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a opisani krug trougla u tački E (različitoj od A). Neka su F i G podnožja normala spuštenih iz tačke D na stranice AB i AC. Dokazati da su duži AE i FG okomite.

(20%) b) U konveksnom četverouglu $\square ABCD$, dijagonale AC i BD sijeku se u tački O pod uglom od $90°$. Neka su K, L, M i N ortogonalne projekcije tačke O na stranice AB, BC, CD i DA četverougla $\square ABCD$. Dokazati da je $\measuredangle NKL = \measuredangle NAO + \measuredangle LBO$ i $\measuredangle NML = \measuredangle NDO + \measuredangle LCO$. Iskoristiti ovu osobinu i pokazati da je četverougao $\square KLMN$ tetivni.

(60%) c) Krug k upisan u tupougli trougao $\triangle ABC$ (ugao kod vrha $\measuredangle ABC$ je tup) ima centar u tački I i dodiruje stranice AC i AB redom u tačkama P i Q. Prava $p(C, I)$ siječe duž PQ u tački N. Dokazati da se oko četverougla $\square BINQ$ može opisati krug.

Zadatak br. 2

(20%) a) Dat je oštrougli trougao $\triangle ABC$ sa ortocentrom H. Dokazati da vrijedi $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}$ gdje su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla.

(20%) b) Simetrala ugla kod vrha A oštrouglog trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a opisani krug trougla u tački E (različitoj od A). Neka su F i G podnožja normala spuštenih iz tačke D na stranice AB i AC. Dokazati da je $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

(60%) c) Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava u tački D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$ dokazati da vrijedi $\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$.

Zadatak br. 3

(20%) a) Dat je oštrougli trougao $\triangle ABC$. Konstruisati kvadrat čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

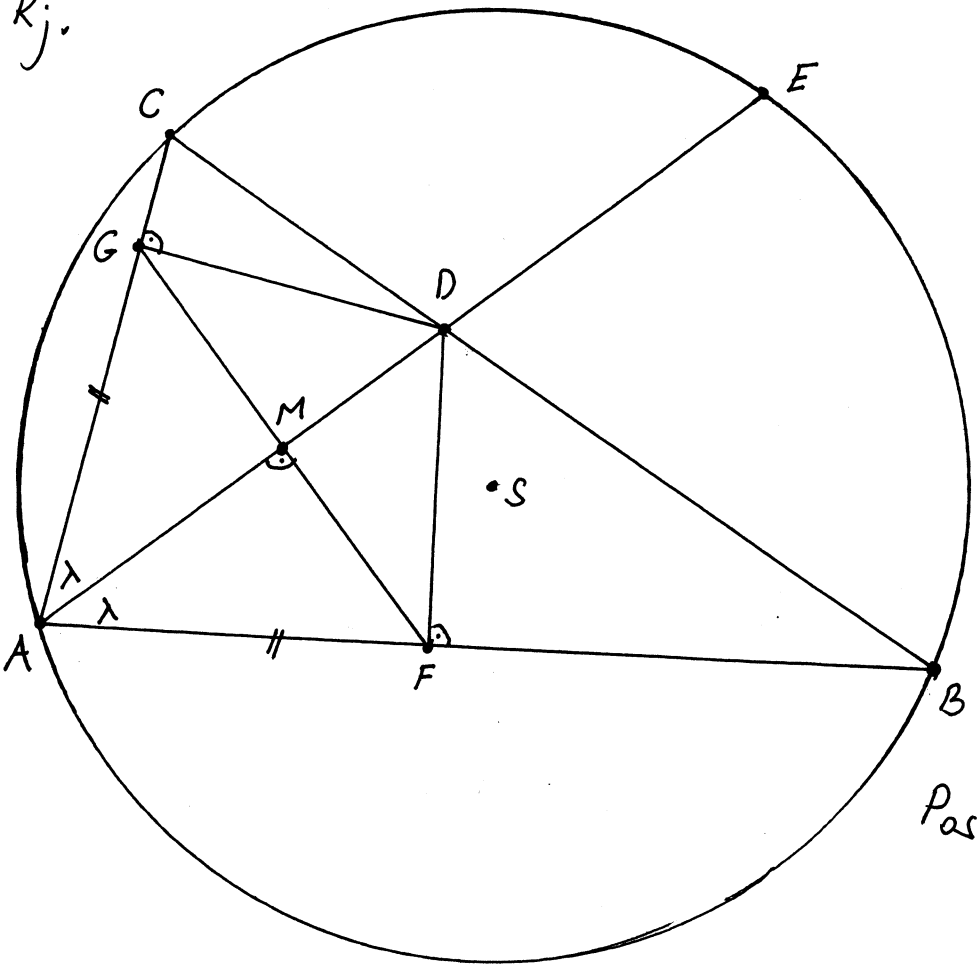
(20%) b) Kroz tačku C pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruisati pravu koja će trougao podijeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

(60%) c) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Simetrala ugla kod vrha A oštrouglog trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a opisani krug trougla u tački E (različitoj od A). Neka su F i G podnožja normala spuštenih iz tačke D na stranice AB i AC. Dokazati da su duži AE i FG okomite.

Rj.



Posmatrajmo trouglove $\triangle AFD$ i $\triangle AGD$ i pokažimo da su oni podudarni.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DFA \cong \sphericalangle DGA = 90^\circ \\ \sphericalangle FAD \cong \sphericalangle GAD = \lambda \\ AD \cong AD \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle AFD \cong \triangle AGD$$

$$\Downarrow$$

$$AF \cong AG$$

Označimo sa M presjek duži AD i FG

Posmatrajmo $\triangle AFM$ i $\triangle AGM$.

$$\left.\begin{array}{l} AF \cong AG \\ \sphericalangle FAM \cong \sphericalangle GAM = \lambda \\ AM \cong AM \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle AMG \cong \triangle AMF$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle AMF \cong \sphericalangle AMG$$

a kako su ovo dva naporedna ugla to je $\sphericalangle AMF \cong \sphericalangle AMG = 90^\circ$

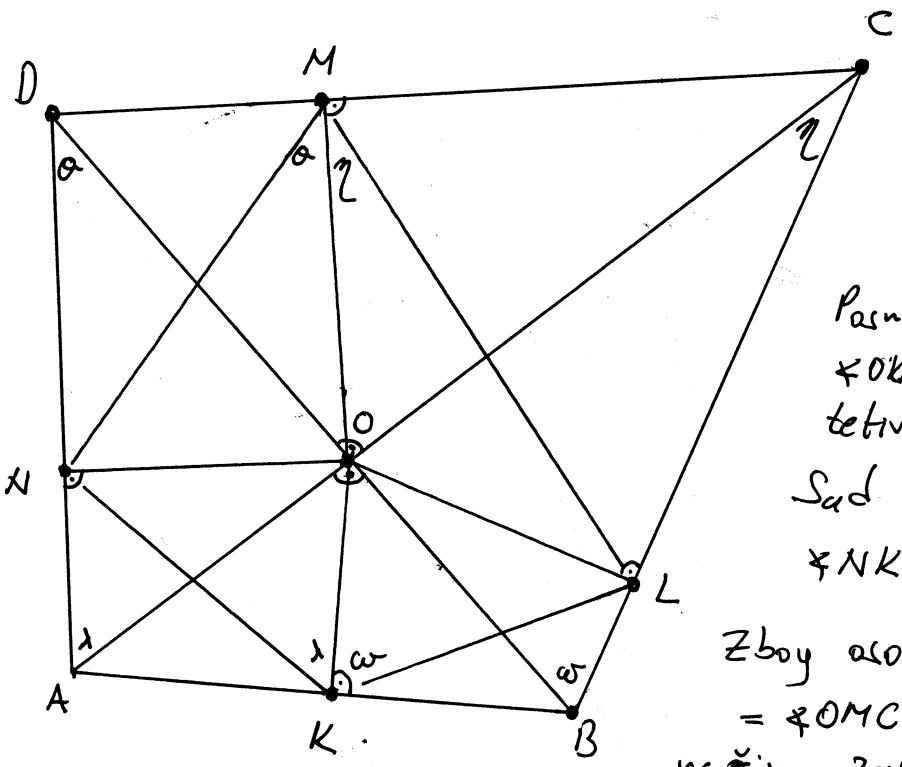
$$\Longrightarrow AD \perp FG$$

q.e.d.

(#) U konveksnom četverouglu $ABCD$, dijagonale AC i BD sijeku se u tački O pod uglom od $90°$. Neka su K, L, M i N ortogonalne projekcije tačke O na stranice AB, BC, CD i DA četverougla $ABCD$.
Dokazati da je $\sphericalangle NKL = \sphericalangle NAO + \sphericalangle LBO$ i
$\sphericalangle NML = \sphericalangle NDO + \sphericalangle LCO$. Iskoristiti ovu osobinu i pokazati da je četverougao $\square KLMN$ tetivni.

Rj. postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ konveksan, } AC \cap BD = \{O\} \\ AC \perp BD,\ K, L, M \text{ i } N \text{ su ortogonalne projekcije} \\ \text{tačke } O \text{ redom na stranice } AB, BC, CD \text{ i } DA \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sphericalangle NKL = \sphericalangle NAO + \sphericalangle LBO \\ \sphericalangle NML = \sphericalangle NDO + \sphericalangle LCO \\ \square KLMN \text{ tetivni} \end{array}$$



Posmatrajmo $\square AKON$, U njemu je $\sphericalangle ANO + \sphericalangle AKO = 180° \Rightarrow \square AKON$ je tetivni $\Rightarrow$ $\sphericalangle NAO = \sphericalangle NKO = \lambda$.

Posmatrajmo $\square KBLO$. U njemu je $\sphericalangle OKB + \sphericalangle BLO = 180° \Rightarrow \square KBLO$ je tetivni $\Rightarrow$ $\sphericalangle OKL = \sphericalangle OBL = \omega$.

Sad imamo

$\sphericalangle NKL = \lambda + \omega = \sphericalangle NAO + \sphericalangle LBO$ q.e.d

Zbog osobine $\sphericalangle DNO = \sphericalangle DMO = \sphericalangle OMC = \sphericalangle OLC = 90°$ na sličan način zaključimo da je

$\sphericalangle NDO = \sphericalangle NMO = \theta$; $\sphericalangle OML = \sphericalangle OCL = \eta$ $\Rightarrow \sphericalangle NML = \sphericalangle NDO + \sphericalangle LCO$. q.e.d.

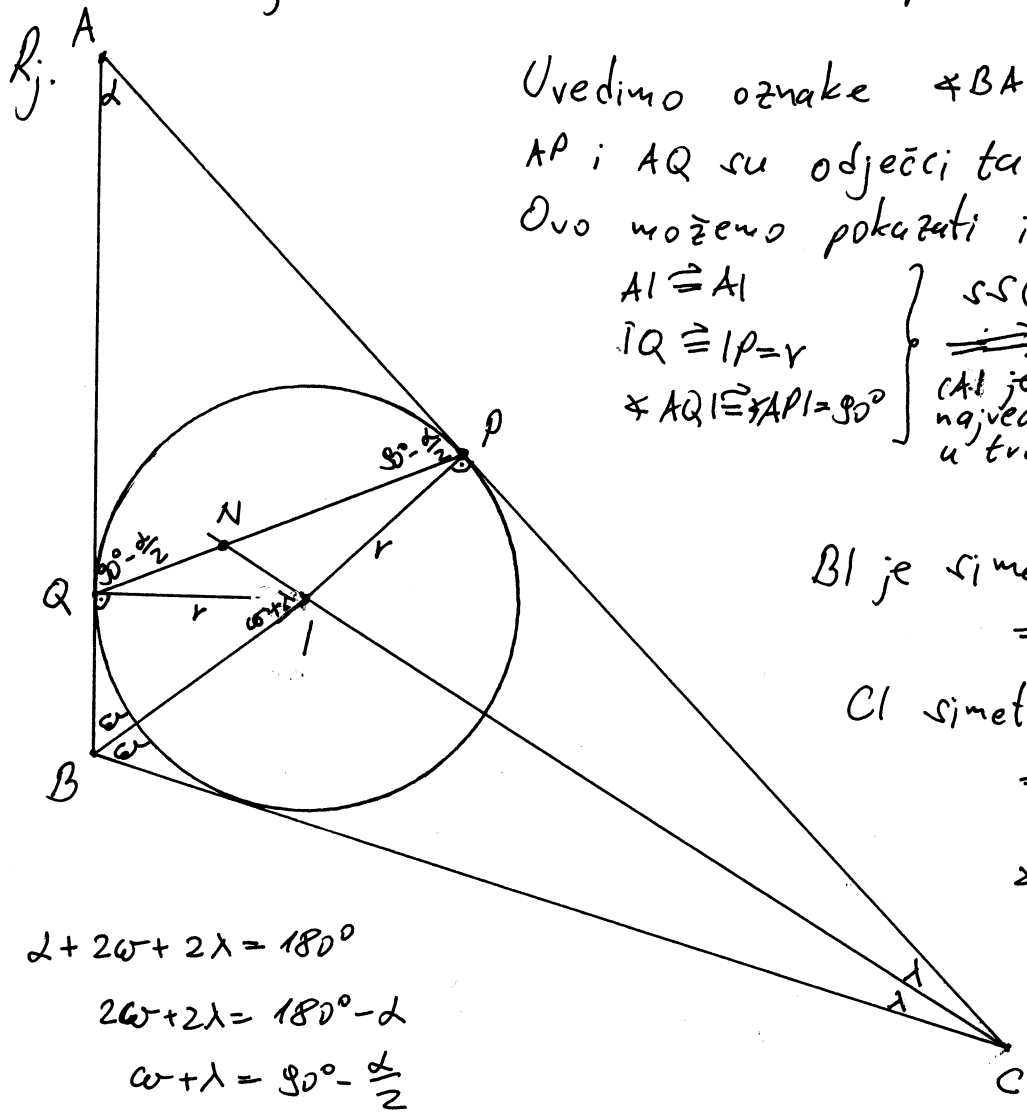
Prema pretpostavci zadatka trouglovi $\triangle AOD$ i $\triangle BCO$ su pravougli pa je $\lambda + \theta = 90°$ i $\omega + \eta = 90°$. Prema tome

$$\sphericalangle NKL + \sphericalangle NML = \lambda + \omega + \eta + \theta = 180°.$$

$\Rightarrow \square KLMN$ je tetivni.

(#) Krug k upisan u tupougli trougao $\triangle ABC$ (ugao kod vrha $\sphericalangle ABC$ je tup) ima centar u tački I i dodiruje stranice AC i AB redom u tačkama P i Q. Prava $p(C, I)$ siječe duž PQ u tački N. Dokazati da se oko četverougao $\square BINQ$ može opisati krug.

Rj.



Uvedimo oznake $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=2\omega$, $\sphericalangle ACB=2\lambda$.

AP i AQ su odječci tangenti pa je $AQ \cong AP$.

Ovo možemo pokazati i na drugi način:

$$\left.\begin{array}{l} AI \cong AI \\ IQ \cong IP = r \\ \sphericalangle AQI \cong \sphericalangle API = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{(AI je najveća str. u trouglu)}]{SSU} \triangle AQI \cong \triangle API \Downarrow AQ \cong AP$$

BI je simetrala ugla $\sphericalangle CBA$

$\Rightarrow \sphericalangle CBI \cong \sphericalangle ABI = \omega$

CI simetrala $\sphericalangle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle PCI \cong \sphericalangle ICB = \lambda$

$\sphericalangle NIB$ je vanjski ugao $\triangle BCI \Rightarrow$

$\sphericalangle NIB = \lambda + \omega$

$\alpha + 2\omega + 2\lambda = 180^\circ$

$2\omega + 2\lambda = 180^\circ - \alpha$

$\omega + \lambda = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle NIB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle AQP$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle AQP \cong \sphericalangle APQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle AQP + \sphericalangle PQB = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle PQB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle NQB$

Sad u $\square BINQ$ imamo

$$\sphericalangle BQN + \sphericalangle BIN = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \omega + \lambda = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

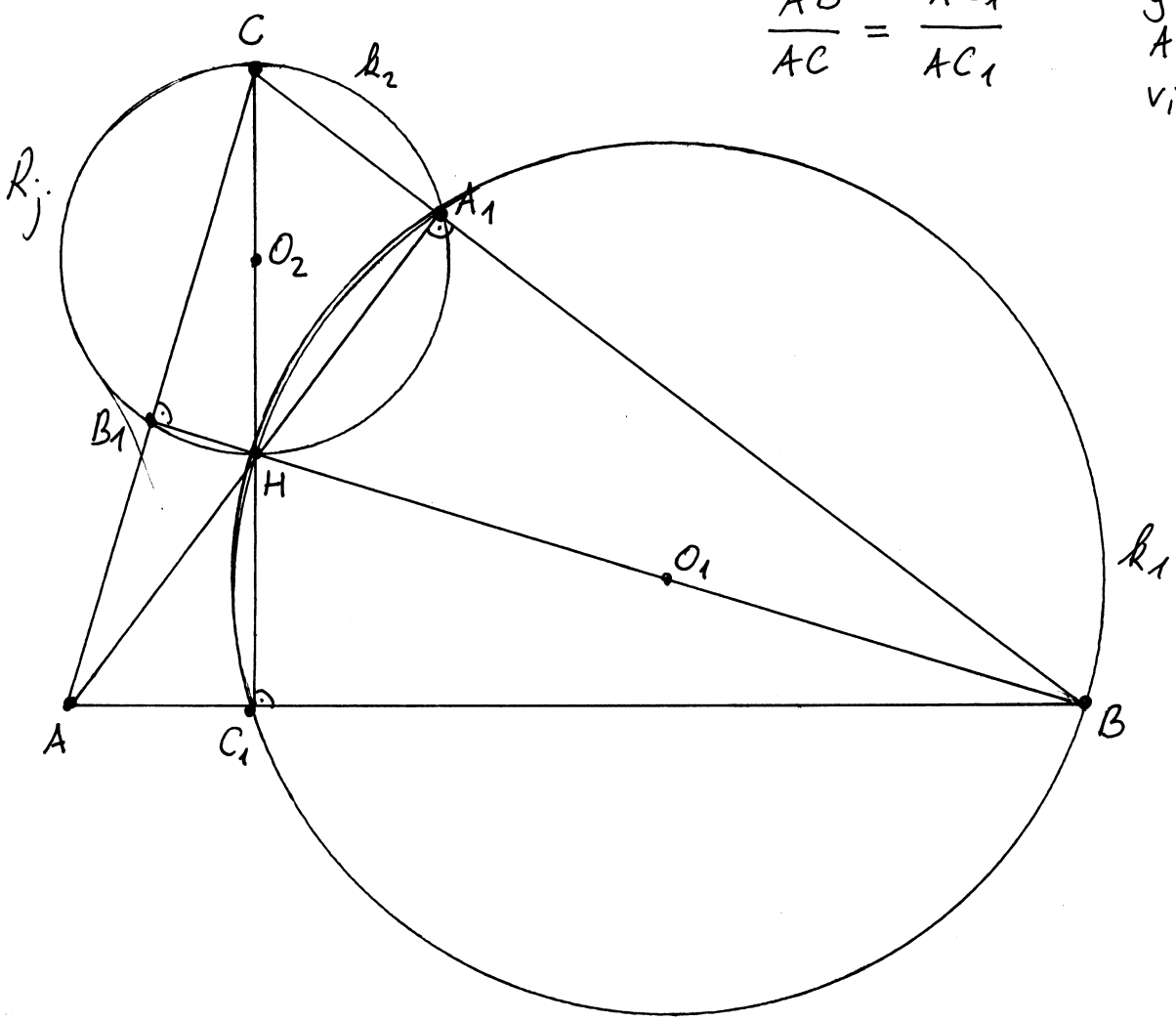
Četverougao $\square BINQ$ je tetivni.

q.e.d.

(#) Dat je oštrougli trougao $\triangle ABC$ sa ortocentrom H. Dokazati da vrijedi

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}$$

gdje su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla.



Neka je dat $\triangle ABC$ i neka su AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla.

Prvo primjetimo da je $\square C_1BA_1H$ tetivni ($\sphericalangle HC_1B + \sphericalangle HA_1B = 180^\circ$), pa ako iskoristimo potenciju tačke A u odnosu na krug $k_1(O_1, O_1B)$ imamo $AC_1 \cdot AB = AH \cdot AA_1$. ...(*)

Isto tako $\square B_1HA_1C$ je tetivni (Zašto?) pa ako njega možemo opisati krug $k_2(O_2, O_2C)$ $\Rightarrow$ $AA_1 \cdot AH = AC \cdot AB_1$ ...(**)

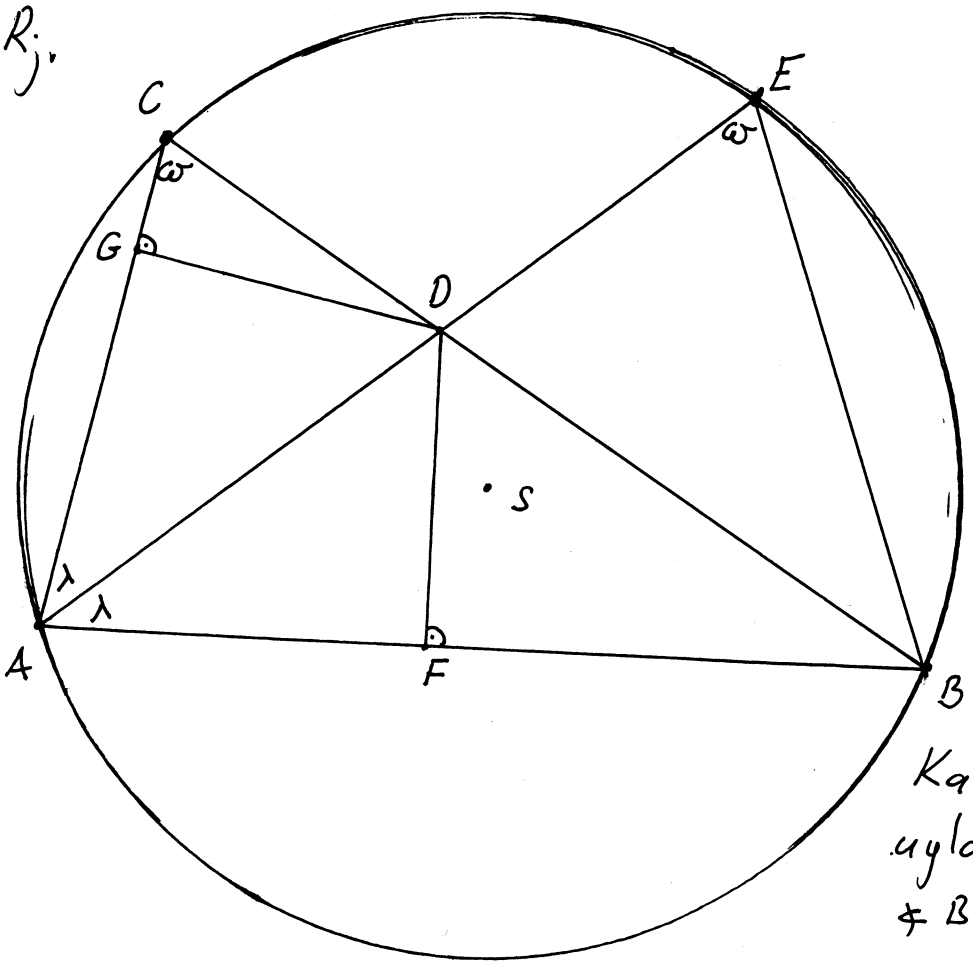
$$(*) \wedge (**) \Rightarrow AB \cdot AC_1 = AA_1 \cdot AH = AC \cdot AB_1$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}$$

q.e.d.

(#) Simetrala ugla kod vrha A oštrouglog trougla $\triangle ABC$ siječe stranicu BC u tački D, a opisani krug trougla u tački E (različitoj od A). Neka su F i G podnožja normala spuštenih iz tačke D na stranice AB i AC. Dokazati da je $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

Rj.



Primjetimo da

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

pa ako bi uspjeli da pokažemo da su trouglovi $\triangle ABE$ i $\triangle ADC$ slični, time bi pokazali i traženu jednakost

Kako je AE simetrala ugla $\sphericalangle BAC$ to je $\sphericalangle BAE \overset{\triangle}{=} \sphericalangle CAD = \lambda$.

Posmatrajmo tetivu AB i primjetimo da su uglovi $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle AEB$ dva oštra periferiska ugla nad tom tetivom pa je $\sphericalangle ACB \overset{\triangle}{=} \sphericalangle AEB = \omega$. Prema tome

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle BAE \overset{\triangle}{=} \sphericalangle CAD = \lambda \\ \sphericalangle AEB \overset{\triangle}{=} \sphericalangle ACD = \omega \\ \sphericalangle ABE \overset{\triangle}{=} \sphericalangle ADC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič UUU}} \triangle ABE \sim \triangle ACD$$

kao treći ugao u trouglu

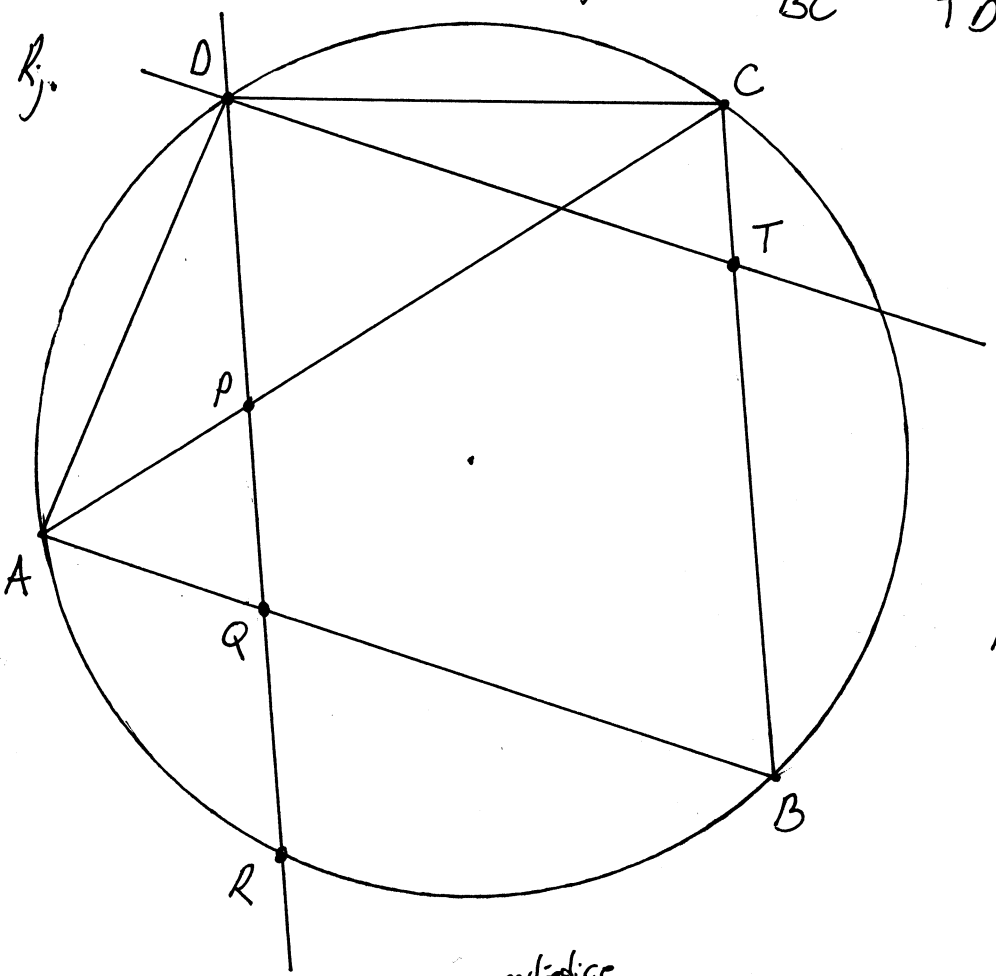
$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

q.e.d.

(#) Četverougao $\square ABCD$ je tetivni. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom BC siječe dijagonalu CA u tački P, stranicu AB u tački Q i krug opisan oko četverougla $\square ABCD$ u tački R. Prava kroz tačku D paralelna sa pravom AB siječe pravu BC u tački T. Ako je $PQ \cong QR$. Dokazati da vrijedi $\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$.

Rj.



Posmatrajmo četverougao $\square ARBD$. Njegove tačke se sijeku u tački Q pa imamo $AQ \cdot QB = QR \cdot QD$

tj. $\frac{AQ}{QR} = \frac{DQ}{BQ}$

Kako je $QR \cong PQ$ to je

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{DQ}{BQ} \quad \dots (*)$$

$$p(P,Q) \parallel p(B,C) \overset{\text{posljedice } T_0T_0}{\Longrightarrow} \frac{AQ}{QP} = \frac{AB}{BC} \quad \dots (**)$$

$$(*) \wedge (**) \Rightarrow \frac{DQ}{BQ} = \frac{AB}{BC} \quad \dots (\square)$$

Primjetimo da je $\square QBTD$ paralelogram (Zašto?). Prema tome $DQ \cong BT \wedge BQ \cong TD$. Sad na osnovu $(\square)$

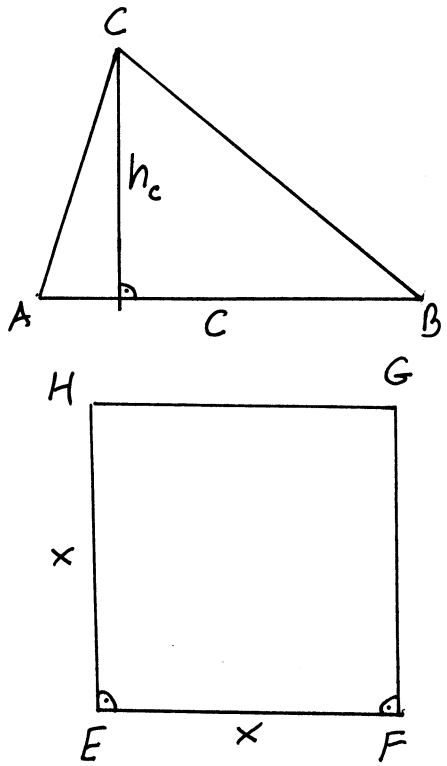
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BT}{TD}$$

q.e.d.

(#) Dat je oštrougli $\triangle ABC$. Konstruisati kvadrat čija će površina biti jednaka površini datog trougla.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je dat $\triangle ABC$ i neka je $\square EFGH$ četverougao koji ima površinu jednaku površini $\triangle ABC$.



Tada $P_{\triangle ABC} = \frac{h_c \cdot c}{2}$

$P_{\square EFGH} = x^2$

$P_{\triangle ABC} = P_{\square EFGH} \Rightarrow \frac{h_c \cdot c}{2} = x^2$

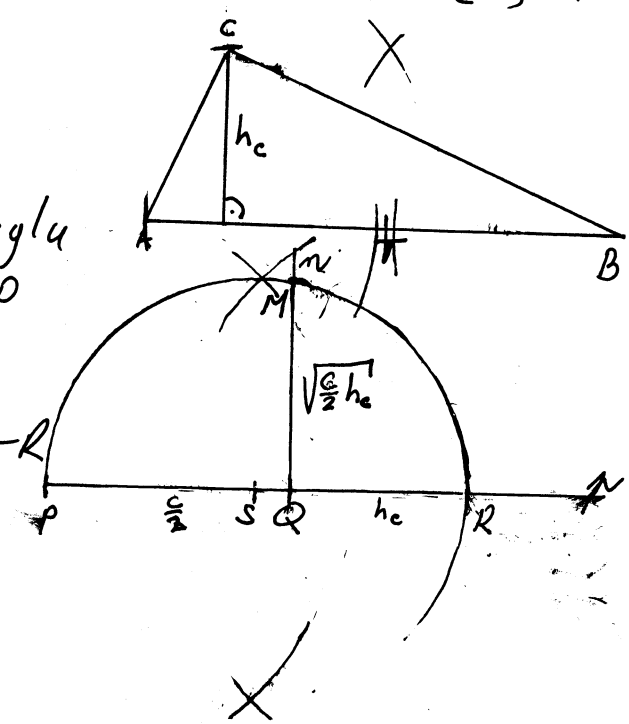
$x^2 = h_c \cdot \frac{c}{2}$

$x = \sqrt{h_c \cdot \frac{c}{2}}$

Kako je dat $\triangle ABC$ time je data i stranica c i visina h_c. Prema tome duž x možemo konstruisati $(x = \sqrt{h_c \cdot \frac{c}{2}})$ a time i kvadrat $\square EFGH$.

Konstrukcija

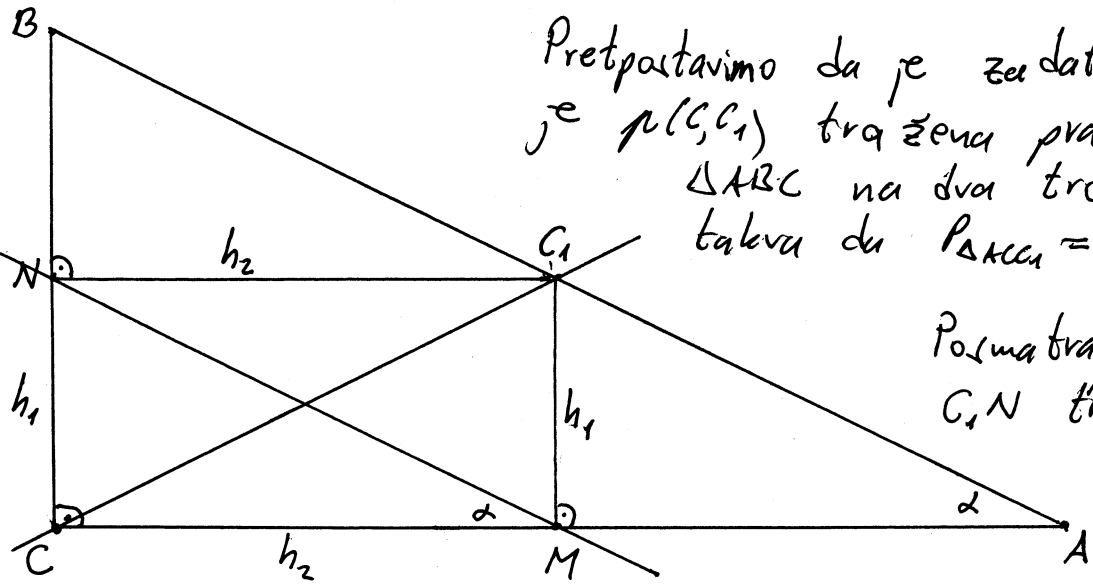
1. dati $\triangle ABC$ sredinu T stranice AB i visinu h_c u datom trouglu
2. polupravu p sa početnom tačkom P
3. $k(P, AT) \cap p = \{Q\}$
4. $k(Q, h_c) \cap p = \{R\}$ ali tako da je $P-Q-R$
5. sredinu S duži PR
6. polukrug $k_1 = k(S, SP)$
7. polupravu n sa početnom tačkom Q t.d. $n \perp p$ i n siječe k_1
8. $n \cap k_1 = \{M\}$,



ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

(#) Kroz tačku C pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruisati pravu koja će trougao podjeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

Rj. <u>Analiza</u>



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(C,C_1)$ tražena prava koja dijeli trougao $\triangle ABC$ na dva trougla $\triangle CAC_1$ i $\triangle CC_1B$ takva da $P_{\triangle ACC_1} = P_{\triangle CC_1B}$.

Posmatrajmo visine C_1M i C_1N trouglova $\triangle ACC_1$ i $\triangle CC_1B$. Uvedimo oznake $AC=b$, $BC=a$, $C_1M=h_1$ i $C_1N=h_2$.

$$P_{\triangle ACC_1} = P_{\triangle CC_1B} \Rightarrow \frac{h_1 \cdot b}{2} = \frac{h_2 \cdot a}{2} \Rightarrow h_1 b = h_2 a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\xRightarrow{MC \cong NC_1 = h_2,\ CN \cong MC_1 = h_1} \frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CN} \Rightarrow \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \xRightarrow{O_1T_0T_0} p(M,N) \parallel p(A,B)$$

$p(M,N) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transverzala $\Rightarrow \sphericalangle CMN \cong \sphericalangle CAB = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle MAC_1 \cong \sphericalangle CMN = \alpha \\ \sphericalangle AMC_1 \cong \sphericalangle MCN = 90^\circ \\ MC_1 \cong CN \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle AMC_1 \cong \triangle MCN \Downarrow CM \cong MA$$

$\Rightarrow$ NC_1 srednja linija $\triangle ABC$ i M sredina AC

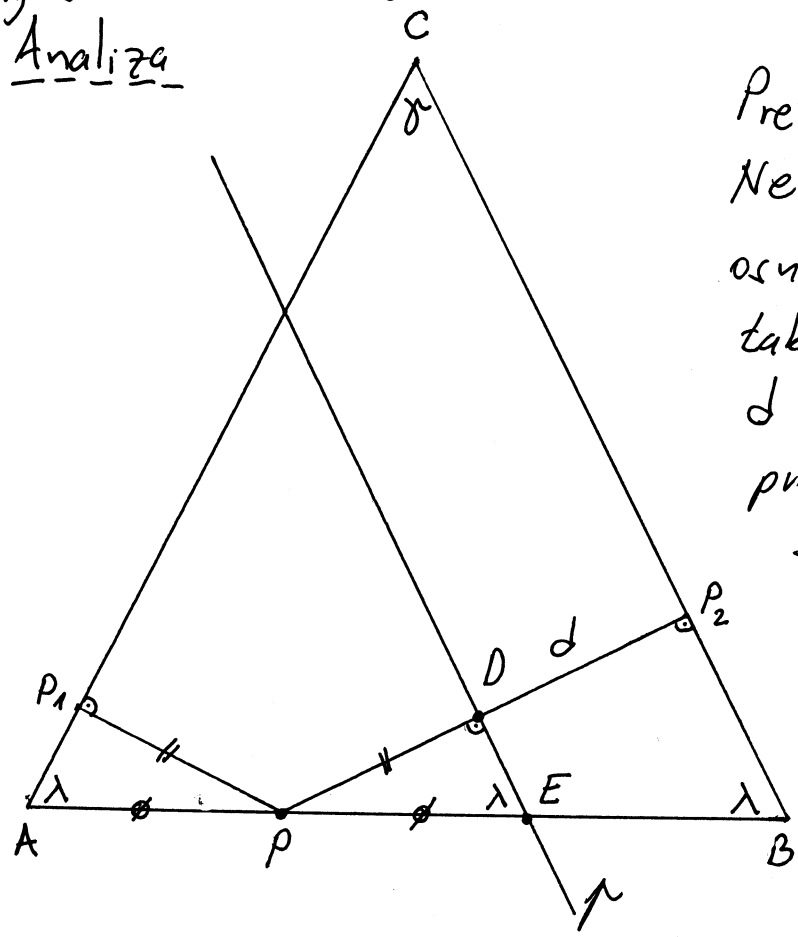
$\Rightarrow$ C_1 sredina hipotenuze AB

Kako je lagano pronaći sredinu C_1 hipotenuze AB to pravu $p(C,C_1)$ nije teško konstruisati.

(#) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

R: jednaka datoj duži.

Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je P tražena tačka na osnovici AB datog jkk $\triangle ABC$ takva da je $PP_1 - PP_2 = d$ gdje je d data duž, a P_1 i P_2 su ortog. projekcije tačke P redom na stranice AC i BC.

Na duži PP_2 izaberimo tačku D t.d. $PP_1 \cong PD$, i kroz tačku D postavimo pravu $p \parallel p(B,C)$.

$p \parallel p(B,C)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle PED \cong \sphericalangle PBC$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle PAP_1 \cong \sphericalangle PED = \lambda \\ \sphericalangle PP_1A \cong \sphericalangle EDP = 90^\circ \\ PP_1 \cong PD \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle APP_1 \cong \triangle PED$$

$$\Downarrow$$

$$AP \cong PE$$

Kako je dat $\triangle ABC$ i dužina d, to pravu p možemo konstruisati (prava p se nalazi na rastojanju d od stranice BC). Poslije toga ćemo dobiti tačku E, pa nije teško konstruisati sredinu P duži AE.